Zuse Institut Berlin (ZIB)
Freie Universität Berlin
Dr. H. Siebert, Dr. S. Röblitz, L. David

8. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Analysis Sommersemester 2011

Abgabe: 10.06.2011, 12:00 Uhr (Tutorenfach B9, Arnimallee 3)

Die Aufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **aller** *Gruppenmitgleider sowie der Tutoriumstermin stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Korrektur zur Vorlesung: In Satz 5.1.b) gilt nur die Implikation, nicht die Äquivalenz ($\gamma > 0 \Rightarrow$ die Lösung $\tilde{y} \equiv 0$ ist instabil)!

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Berechnen Sie (möglicherweise komplexe) Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} y$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Bestimmen Sie für die Differentialgleichung

$$y' = \lambda y + A_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad \lambda < 0,$$

eine partikuläre Lösung der Form

$$y_p(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Wie verhalten sich A und φ asymptotisch für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$? Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung? *(Hinweis: Die Funktionen* $\sin(\omega t)$ *und* $\cos(\omega t)$ *sind linear unabhängig. Bestimmen Sie daher* A *und* φ *in Abhängigkeit von* ω *mittels Koeffizientenvergleich von* $\sin(\omega t)$ *und* $\cos(\omega t)$*. Verwenden Sie gegebenenfalls Additionstheoreme, um* $\sin(\omega t + \varphi)$ *und* $\cos(\omega t + \varphi)$ *aufzulösen.)*

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Man betrachte eine Gleichung der Form $y' + y = u(t)$. Ziel der Regelungstechnik ist es, die Funktion $u(t)$ so zu bestimmen, dass sich asymptotisch ein gewünschter stabiler Zustand y_d einstellt, d.h., $y_d = \lim_{t\to\infty} y(t)$. Aus praktischen Gründen betrachtet man folgende Ansätze:

(a) P-Regler (P wie "proportional")

$$u(t) := K_P(y_d - y(t)), \quad K_P > 0.$$

Welche Differentialgleichung erfüllt das geregelte System? Welcher stationäre Punkt stellt sich ein? Ist er stabil?

(b) PI-Regler (I wie "integrierend")

$$u(t) := K_P(y_d - y(t)) + K_I \int_0^t (y_d - y(s))ds, \quad K_P, K_I > 0.$$

Formulieren Sie hierzu ein Differentialgleichungssystem in den Variablen (u, y). Welcher stationäre Punkt stellt sich nun ein? Ist er stabil? Für welche Wahl der Parameter erhält man ein schwingendes Verhalten?