Hélène **Esnault**
Freie Universität Berlin
(associée à Harvard U. et U. Copenhagen)

Titre: Pourquoi faisons-nous des mathématiques?

Résumé: Quelques éléments sur les raisons pour lesquelles nous faisons des mathématiques, et la liberté qu'elles nous offrent.

ENS, 3 avril 2023

Un ami berlinois m'a envoyé il y a quelques jours le lien d'une interview de Daniel Cohn-Bendit au TAZ, le journal de la gauche allemande, alternative et verte. Comment comprend-il l' ébullition en France, notamment la forte participation des jeunes au mouvement, alors que au temps de sa gloire, la jeunesse ne pensait pas à la vieillesse? Sa réponse m'a frappée. Les Français disait-il ne croient plus en rien, hormis la liberté après la retraite. Pour préserver cette liberté, ils sont prêts à se battre.

Pourquoi faisons-nous des mathématiques? Les réponses sont sûrement aussi diverses que nous-mêmes. Il y a cependant une constante: les mathématiques sont notre liberté.

Nous venons aux mathématiques par des chemins divers. Certains par la physique, ou par l'informatique, ou par les sciences d'ingénierie, ou par la biologie. À un certain moment on veut structurer note activité tournée vers les applications, en comprendre les fondements, qui eux, ne sont plus ancrés dans la vie, dans la société. C'est l'attrait de l' *abstraction*. D'autres encore par l'art, la poésie, la philosophie. À un certain moment, on essaie de surmonter le subjectivisme lié à la perception de l'esthétique. C'est le critère du *vrai-faux*.

Parmi les moteurs des mathématiques on compte donc l'abstraction et le critère du vrai-faux.

Nous qui pratiquons les mathématiques, et les développons, commençons en règle jeunes. Pour ce qui me concerne, l'abstraction et le vrai-faux ont éclairé mon adolescence. Penser en termes d'arguments, loin de la misère sociale et de l'incertitude du lendemain, loin des applications possibles ou pas (Hiroshima a sûrement contribué à éloigner plus d'un des applications), décortiquer les différentes étapes de causalité, chuter si on a fait une erreur, tomber pile-poil sur l'assertion que l'on veut démontrer si l'argument est correct, m'a fait tomber amoureuse des mathématiques.

Plus tard, quand les mathématiques elles-mêmes sont devenues le centre de ma vie, l'abstraction et le vrai-faux sont alors devenus une évidence. La tension permanente pour essayer de comprendre, la détresse quand finalement un argument est faux, la joie indescriptible quand on sent monter un argument qui finalement va donner une solution, le bonheur de pouvoir partager une idée avec quelqu'un d'autre, de comprendre celle de l'autre, de boxer avec pour essayer de sortir vainqueur, sont les éléments qui deviennent l'ossature de la *pratique* des mathématiques. Cette pratique comprend les *rêves* mathématiques, aussi l'aspiration de certains à la *perfection*, et mon propre refus de cette notion.

Les rêves mathématiques se développent sur la base de ce que l'on comprend, de ce que l'on ne comprend pas, et de comment on voudrait que les choses soient pour qu'on puisse les comprendre. Le terme d'usage est *conjecture*. Souvent, quand nous en formulons une, nous ne faisons que rêver à voix haute: ce serait si bien si les choses étaient ainsi. Il est rare que nous argumentions quand nous formulons une conjecture. Au mieux, nous nous appuyons sur un morceau de théorie déjà compris, sans que la théorie soit vraiment générale, et nous *postulons* que ce morceau contient déjà des règles générales. On pourrait dire, pour faire bref, que on ne sait plus avancer, mais que aussi on ne peut plus reculer pour faire un détour, donc on postule que on peut continuer comme on a commencé. Bien sûr l'image est chargée ... et inspirée de Tucholsky.

Il est intéresssant de constater que les mathématiciens les plus éminents utilisent de façon différenciée la notion de conjecture. Par exemple Grothendieck n'avait peur de rien, il ignorait le vertige. Comme les Encyclopédistes avant lui, dans un autre domaine, il *se passait* de l' Histoire, pensait partir de zéro. Ses conjectures standard visaient à donner une explication à la partie mystérieuse de la conjecture de Weil. À ce jour, nous ne savons pratiquement rien sur elles. Deligne est ancré dans l'Histoire. Cela l'a aidé à prouver les conjectures de Weil, en contournant les conjectures standard. Parcimonieux, il veut voir des évidences avant de formuler des généralités. Tout son corps semble souffrir quand quelqu'un, dans le feu de la jeunesse, évoque en sa présence des conjectures de grande porté. Peter Scholze a formulé une conjecture de grande généralité (ICM 2018, Conjecture 9.5) sur l'existence d'une cohomologie sur les variétés définies sur $\bar{\mathbb{F}}_p$, à valeur dans ce qu'il appelle la catégorie de Kottwitz, qui a des points communs avec les espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$. Nous sommes 70 ans plus tard, le style est sûrement différent, mais je trouve un certain lien avec les conjectures de Weil. De fait, la conjecture relierait, si elle pouvait être comprise, la cohomologie ℓ-adique et la cohomologie crystalline.

La perfection est une aspiration de beaucoup de mathématiciens. Une partie de cette aspiration provient de ce sentiment esthétique qui nous remplit quand un argument voit le jour. C'est comme si une nouvelle couleur naissait, ou une combination de couleurs qui nous entourent. La lumière que cette couleur dispense nous éblouit, et nous remplit de joie. Dans l'euphorie, nous aspirons à la rendre plus vive encore, à la consigner *pour toujours*, à la rendre *éternelle*. Pourtant ce faisant, on oublie l'Histoire. Tous nos arguments sont inscrits dans l'Histoire. Et tous, je crois sans exception, deviendrons à terme une pièce d'un ensemble plus complet. En ce sens ils se *trivialiseront*. Ils garderont leur vérité au sens vrai-faux, mais perdrons de leur acuité. Ils seront généralisés, remplacés par des arguments plus incisifs et plus économes pour notre cerveau. Ceci m'amène à combattre le discours sur la perfection. Celle-ci est présente car nous sommes des êtres humains avec idéologie et croyances. Elle n'existe pas dans les mathématiques.

Ce qui nous pousse plus loin en mathématiques est notre envie de *savoir*. Nous voulons savoir. Un peu comme quand on lit un polar bien ficelé. On veut savoir. Au contraire du polar, nous avons au fond de nous-mêmes la certitude qu' il n'y a jamais de réponse à tout. Chaque réponse individuelle ou en bloc porte le germe de nouvelles questions, de nouveaux problèmes. En ce sens, personne ne peut nous dérober nos mathématiques, et la liberté toujours renouvelée qu'elle nous offre.