Lokale Systeme in der Geometrie und der Arithmetik

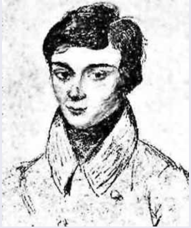
Hélène Esnault

Greifswald, Felix-Hausdorff-Vorlesung, 07.01.2021

Évariste Galois 1811-1832

Artikel über Gleichungsauflösung bei der Akademie abgelehnt; 2mal abgelehnt bei der École Polytechnique;

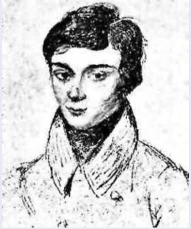
Republikaner, 2mal inhaftiert; im Duell ?wg. Stéphanie-Félicie Poterin du Motel? gestorben



Évariste Galois 1811-1832

Artikel über Gleichungsauflösung bei der Akademie abgelehnt; 2mal abgelehnt bei der École Polytechnique;

Republikaner, 2mal inhaftiert; im Duell ?wg. Stéphanie-Félicie Poterin du Motel? gestorben



entwarf vor seinem dramatischen Tod im Duell die Theorie der endlichen Körper und deren Erweiterungen:

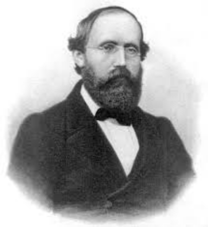
Galois' tiefer Ansatz

kompakt ausgedrückt:

Galois Gruppe F=Permutationen aller Nullstellen polynomialer Gleichungen mit Koeffizienten in $F \rightsquigarrow$ proendliche Gruppe; $F \hookrightarrow F' \subset \bar{F}$ (separabler Abschluß) $\leftrightsquigarrow$ (abgeschlossene) Untergruppe $H \subset \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ der (proendichen) Galois Gruppe $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F) = \mathrm{Aut}(\bar{F}/F)$.

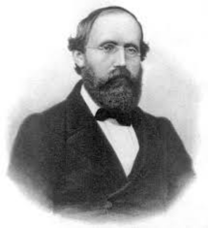
Bernhard Riemann 1826-1866

hätte Theologe werden sollen, hat Latein, Griechisch, Hebräisch studiert, erst dann Mathematik



Bernhard Riemann 1826-1866

hätte Theologe werden sollen, hat Latein, Griechisch, Hebräisch studiert, erst dann Mathematik



entwickelte den Begriff der riemannschen Flächen (RF), der Moduli der RF, der mehrdeutigen Funktionen (z.B. der Logarithmus)

Riemann: zwei tiefe Sätze

Riemannscher Abbildungssatz + Uniformisierungstheorem:

einfach zusammenhängende RF sind: die riemannsche Sphere $\mathbb{P}^1, \mathbb{C}$ oder die Kreisscheibe $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\} \rightsquigarrow$ spätere Klassifikation für kompakte RF in Geschlecht $0, 1, \geq 2$.

Riemann: zwei tiefe Sätze

Riemannscher Abbildungssatz + Uniformisierungstheorem:

einfach zusammenhängende RF sind: die riemannsche Sphere $\mathbb{P}^1, \mathbb{C}$ oder die Kreisscheibe $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ $\rightsquigarrow$ spätere Klassifikation für kompakte RF in Geschlecht $0, 1, \geq 2$.

Riemannscher Existenztheorem (RET):

$X' \to X$ Überlagerung einer RF X trägt eine eindeutige Struktur als RF $\rightsquigarrow$ Grothendiecks Theorie (siehe unten)

Henri Poincaré 1854-1912

Grosse Familie von Wissenschaftlern und Politikern; selbst hat eine 0 (disqualfiizierend) beim Abitur in der Mathematik erhalten (zu spät angekommen...und Thema falsch verstanden..) 

Henri Poincaré 1854-1912

Grosse Familie von Wissenschaftlern und Politikern; selbst hat eine 0 (disqualfiizierend) beim Abitur in der

Mathematik erhalten (zu spät angekommen...und Thema falsch verstanden..)

Begründer der algebraischen Topologie: Begriff der Mannigfaltigkeiten X, der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ eingeführt:

Poincaré Fundamentalgruppe

kompakt ausgedrückt:

$x \in X$, $\pi_1(X, x) = \{$Homotopieklassen stetiger Schleifen, basiert in $x\}$; Multip. durch Zusammensetzung; abstrakte Gruppe.

Poincaré Fundamentalgruppe

kompakt ausgedrückt:

$x \in X$, $\pi_1(X, x) = \{$Homotopieklassen stetiger Schleifen, basiert in $x\}$; Multip. durch Zusammensetzung; abstrakte Gruppe.

$\rightsquigarrow \bar{X} \to X' \to X$ universelle Überlagerung basiert in x und Zwischenüberlagerung $\leftrightsquigarrow$ Untergrupe $H \subset \pi_1(X, x) = \mathrm{Aut}(\bar{X}/X)$.

Poincaré Fundamentalgruppe

kompakt ausgedrückt:

$x \in X$, $\pi_1(X,x) = \{$Homotopieklassen stetiger Schleifen, basiert in $x\}$; Multip. durch Zusammensetzung; abstrakte Gruppe.

$\rightsquigarrow$ $\bar{X} \to X' \to X$ universelle Überlagerung basiert in x und Zwischenüberlagerung $\leftrightsquigarrow$ Untergrupe $H \subset \pi_1(X,x) = \mathrm{Aut}(\bar{X}/X)$.

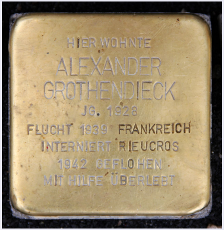
Riemanns Beispiele:

$$\bar{X} = \mathbb{P}^1 \xrightarrow{=} X = \mathbb{P}^1$$

$$\bar{X} = \mathbb{C} \to X = \mathrm{torus}$$

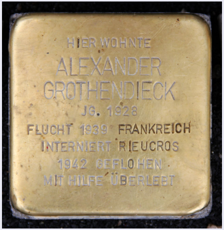
$$\bar{X} = \Delta \to X \text{ Kurve des Geschlechts } \geq 2$$

Alexander Grothendieck 1928-2014

Mutter Hamburger protestantische Bourgeoisie, Vater jüdischer ukrainischer Anarchist; Zuflucht Berlin, dann Frankreich;  

im KZ von der fr. Vichy Regierung interniert; Zuflucht Le Chambon-sur-Lignon

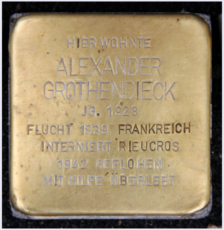
Alexander Grothendieck 1928-2014

Mutter Hamburger protestantische Bourgeoisie, Vater jüdischer ukrainischer Anarchist; Zuflucht Berlin, dann Frankreich;  

im KZ von der fr. Vichy Regierung interniert; Zuflucht Le Chambon-sur-Lignon

!!Galois /Arithmetik == Riemann-Poincaré /Geometrie!!

Alexander Grothendieck 1928-2014

Mutter Hamburger protestantische Bourgeoisie, Vater jüdischer ukrainischer Anarchist; Zuflucht Berlin, dann Frankreich;  

im KZ von der fr. Vichy Regierung interniert; Zuflucht Le Chambon-sur-Lignon

!!Galois /Arithmetik == Riemann-Poincaré /Geometrie!!

kompakt ausgedrückt:

$$F \leftrightsquigarrow X; F' \leftrightsquigarrow X'; \bar{F} \leftrightsquigarrow \bar{X}$$

$$F \subset F' \subset \bar{F} \leftrightsquigarrow \bar{X} \to X' \to X$$

$$F \subset \bar{F} \leftrightsquigarrow x \in X$$

Grothendieck's étale fundamental group

X zsh. Sch., $x \in X$ geom. Punkt, definiere étale endl Überl. $(Y, y) \to (X, x)$; Limit $(\bar{X}, \bar{x}) \to (X, x)$: étale universelle Überl; $\pi_1^{\text{ét}}(X, x) = \mathrm{Aut}(\bar{X}/X)$ proendlich;
Bsp: $X = \mathrm{Spec}(F), x = \mathrm{Spec}(\bar{F})$, dann $\pi_1^{\text{ét}}(X, x) = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$;

Grothendieck's étale fundamental group

X zsh. Sch., $x \in X$ geom. Punkt, definiere étale endl Überl. $(Y, y) \to (X, x)$; Limit $(\bar{X}, \bar{x}) \to (X, x)$: étale universelle Überl; $\pi_1^{\text{ét}}(X, x) = \mathrm{Aut}(\bar{X}/X)$ proendlich;
Bsp: $X = \mathrm{Spec}(F), x = \mathrm{Spec}(\bar{F})$, dann $\pi_1^{\text{ét}}(X, x) = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$;

RET $\Rightarrow$

$X/\mathbb{C}$ Riemannsche Fläche oder allgemeiner komplexe Mannigfaltigkeit $\Rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, x) =$ proendliche Komplettierung von $\pi_1(X, x)$.

Grothendieck's étale fundamental group

X zsh. Sch., $x \in X$ geom. Punkt, definiere étale endl Überl. $(Y, y) \to (X, x)$; Limit $(\bar{X}, \bar{x}) \to (X, x)$: étale universelle Überl; $\pi_1^{\text{ét}}(X, x) = \mathrm{Aut}(\bar{X}/X)$ proendlich;
Bsp: $X = \mathrm{Spec}(F), x = \mathrm{Spec}(\bar{F})$, dann $\pi_1^{\text{ét}}(X, x) = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$;

RET $\Rightarrow$

$X/\mathbb{C}$ Riemannsche Fläche oder allgemeiner komplexe Mannigfaltigkeit $\Rightarrow \pi_1^{\text{ét}}(X, x) =$ proendliche Komplettierung von $\pi_1(X, x)$.

Homotopie (topologische) exakte Sequenz für X/F, '60

$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}}, x) \to \pi_1^{\text{ét}}(X, x) \to \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to 1 \rightsquigarrow$ Aktion $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ auf $\pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}}, x)$.

Lokale Systeme

Definition

topologisch: Darstellung $\rho : \pi_1(X, x) \to GL_r(\mathbb{C})$ modulo Konjugation;
étale: stetige Darstellung $\rho^{\text{ét}} : \pi_1^{\text{ét}}(X, x) \to GL(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ modulo Konjugation, $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ algebraischer Abschluß des Körpers der ℓ-adischen Zahlen, $\ell \neq$ char. F.

Lokale Systeme

Definition

topologisch: Darstellung $\rho : \pi_1(X, x) \to GL_r(\mathbb{C})$ modulo Konjugation;
étale: stetige Darstellung $\rho^{\text{ét}} : \pi_1^{\text{ét}}(X, x) \to GL(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ modulo Konjugation, $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ algebraischer Abschluß des Körpers der ℓ-adischen Zahlen, $\ell \neq$ char. F.

Wo findet man sie?

Geometrische: $Y \to X$ Morphismus $\rightsquigarrow$
$/\mathbb{C}$: $\rho : \pi_1(X, x) \to GL(H^i(Y_x, \mathbb{Z}))$;
$/F$: $\rho^{\text{ét}} : \pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}}, x) \to GL(H^i(Y_x, \mathbb{Z}_\ell))$, *invariant* durch $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ (man sagt *arithmetisch*).

Lokale Systeme

Definition

topologisch: Darstellung $\rho : \pi_1(X, x) \to GL_r(\mathbb{C})$ modulo Konjugation;
étale: stetige Darstellung $\rho^{\text{ét}} : \pi_1^{\text{ét}}(X, x) \to GL(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ modulo Konjugation, $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ algebraischer Abschluß des Körpers der ℓ-adischen Zahlen, $\ell \neq$ char. F.

Wo findet man sie?

Geometrische: $Y \to X$ Morphismus $\rightsquigarrow$
$/\mathbb{C}$: $\rho : \pi_1(X, x) \to GL(H^i(Y_x, \mathbb{Z}))$;
$/F$: $\rho^{\text{ét}} : \pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}}, x) \to GL(H^i(Y_x, \mathbb{Z}_\ell))$, *invariant* durch $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ (man sagt *arithmetisch*).

Verträglichkeit (Grothendiecks Schule)

$F \subset \mathbb{C}$: $H^i(Y_x, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_\ell = H^i(Y_x, \mathbb{Z}_\ell)$, $\pi_1^{\text{ét}}(X_{\mathbb{C}}, x) = \pi_1^{\text{ét}}(X_{\bar{F}}, x)$, $\rho^{\text{ét}}, \rho$ verträglich.

Andere?

Moduli

$\exists$ Parameterraum (Moduli) $\mathrm{Hom}(\pi_1(X,x), GL_r(\mathbb{C}))$.
Affine algebraische Varietät $\rightsquigarrow$ Zariski Topologie (schwächer als Hausdorff Topologie!).

Andere?

Moduli

$\exists$ Parameterraum (Moduli) $\mathrm{Hom}(\pi_1(X,x), GL_r(\mathbb{C}))$.
Affine algebraische Varietät $\rightsquigarrow$ Zariski Topologie (schwächer als Hausdorff Topologie!).

Vermutung (E-Kerz '19)

Arithmetische Darstellungen sind Zariski dicht.

Andere?

Moduli

$\exists$ Parameterraum (Moduli) $\mathrm{Hom}(\pi_1(X,x), GL_r(\mathbb{C}))$.
Affine algebraische Varietät $\rightsquigarrow$ Zariski Topologie (schwächer als Hausdorff Topologie!).

Vermutung (E-Kerz '19)

Arithmetische Darstellungen sind Zariski dicht.

Moritz Kerz: 2te Hälfte des Fotos der Ankündigung des Vortrags!

Hoffnung

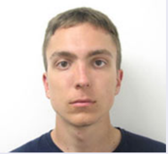
Alexandr Petrov '20

fantastisches Ergebnis: Fontaine-Mazur Vermutung $\Rightarrow$ [*arithmetisch* $\Rightarrow$ *Unterquotient von geometrisch*].

Hoffnung

Alexandr Petrov '20

fantastisches Ergebnis: Fontaine-Mazur Vermutung $\Rightarrow$ [*arithmetisch* $\Rightarrow$ *Unterquotient von geometrisch*].

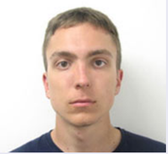


Alexandr Petrov: Doktorand, Harvard

Hoffnung

Alexandr Petrov '20

fantastisches Ergebnis: Fontaine-Mazur Vermutung $\Rightarrow$ [*arithmetisch* $\Rightarrow$ *Unterquotient von geometrisch*].

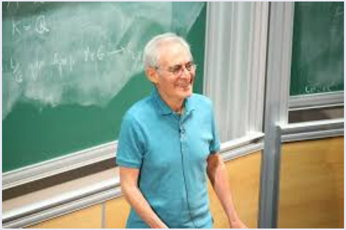


Alexandr Petrov: Doktorand, Harvard

Zusammengefasst:

Dichtheit der arithmetischen Darstellungen (Fontaine-Mazur Vermutung + Petrov's theorem) = Dichtheit der geometrischen Darstellungen.

 Jean-Marc Fontaine 1944-2919

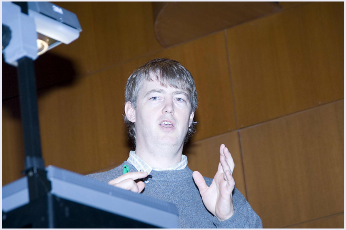
 Barry Mazur 1937–

Simpson

rigid: GL_r-Bahn isoliert; so Vermutung $\Rightarrow$ [rigid $\Rightarrow$ geometrisch] (was Simpson bereits '90 vermutet hat)
Theorem (Simpson '92): rigid $\Rightarrow$ arithmetisch.
Aber hat: geometrisch $\Rightarrow$ integral i.e. $\rho : \pi_1(X, x) \to GL_r(\bar{\mathbb{Z}}) \Rightarrow$
Vermutung (Simpson '90): *rigid* $\Rightarrow$ *integral.*

Simpson

rigid: GL_r-Bahn isoliert; so Vermutung $\Rightarrow$ [rigid $\Rightarrow$ geometrisch]
(was Simpson bereits '90 vermutet hat)
Theorem (Simpson '92): rigid $\Rightarrow$ arithmetisch.
Aber hat: geometrisch $\Rightarrow$ integral i.e. $\rho : \pi_1(X, x) \to GL_r(\bar{\mathbb{Z}}) \Rightarrow$
Vermutung (Simpson '90): *rigid* $\Rightarrow$ *integral.*



Carlos Simpson

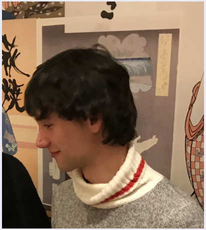
Integralität: 1te kleine Evidenz für die Vermutung

Theorem (E-Groechenig) '18

rigid + GL_r Bahn im glatten Locus von $\mathrm{Hom}(\pi_1(X,x), GL_r(\mathbb{C})) \Rightarrow$ integral.

Theorem (E-Groechenig) '18

rigid + GL_r Bahn im glatten Locus von $\mathrm{Hom}(\pi_1(X,x), GL_r(\mathbb{C})) \Rightarrow$ integral.



Michael Groechenig

Rang 1: 2te kleine Evidenz für die Vermutung

Theorem (E-Kerz) '19

Dichtheit richtig für $r = 1$.

Theorem (Grothendieck ’70 + Clemens ..Brieskorn): geometrische lokale Systeme sind quasi-unipotent im unendlichen.

Quasi-Unipotenz: 3te kleine Evidenz für die Vermutung

Theorem (Grothendieck '70 + Clemens ..Brieskorn): geometrische lokale Systeme sind quasi-unipotent im unendlichen.

Theorem (E-Kerz '20)

Quasi-unipotente lokale Systeme sind Zariski dicht.

Quasi-Unipotenz: 3te kleine Evidenz für die Vermutung

Theorem (Grothendieck '70 + Clemens ..Brieskorn): geometrische lokale Systeme sind quasi-unipotent im unendlichen.

Theorem (E-Kerz '20)

Quasi-unipotente lokale Systeme sind Zariski dicht.

Alle Aussagen sind in der komplexen Geometrie. Alle Beweise sind arithmetisch und benutzen stark die Aktion von $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$.

Quasi-Unipotenz: 3te kleine Evidenz für die Vermutung

<u>Theorem</u> (Grothendieck '70 + Clemens ..Brieskorn): geometrische lokale Systeme sind quasi-unipotent im unendlichen.

Theorem (E-Kerz '20)

Quasi-unipotente lokale Systeme sind Zariski dicht.

Alle Aussagen sind in der komplexen Geometrie. Alle Beweise sind arithmetisch und benutzen stark die Aktion von $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$.