# $1 + 1 = 0$: Monsieur Weil, est-ce bien rationnel?

**Hélène Esnault**

Freie Universität Berlin
Allemagne

Paris, BnF, 15 janvier 2014

# L'hypothèse (1859) de Riemann (1826-1886)

- Bernhard Riemann, fils d'un pasteur luthérien, à l'origine destiné à la théologie luthérienne, vient juste, à 33 ans, d'être nommé professeur à Göttingen et de rentrer à l' Académie des Sciences de Berlin.

# L'hypothèse (1859) de Riemann (1826-1886)

- Bernhard Riemann, fils d'un pasteur luthérien, à l'origine destiné à la théologie luthérienne, vient juste, à 33 ans, d'être nommé professeur à Göttingen et de rentrer à l' Académie des Sciences de Berlin.

## L'hypothèse (1859) de Riemann (1826-1886)

- Il a fondé, dans sa thèse dirigée par Carl Friedrich Gauß- un des plus grands arithméticiens- les bases de la géométrie riemannienne.

# L'hypothèse (1859) de Riemann (1826-1886)

- Il a fondé, dans sa thèse dirigée par Carl Friedrich Gauß- un des plus grands arithméticiens- les bases de la géométrie riemannienne.
- Il s'intéresse à l'arithmétique: il définit la *fonction zêta*

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{(2 \cdot 2)^s} + \ldots$$

pour $s$ un nombre complexe de partie réelle $\mathrm{Re}(s) > 1$: cette condition assure que la série converge et que vue comme fonction de $s$, c'est une bonne fonction (analytique).

# L'hypothèse (1859) de Riemann (1826-1886)

- Il en montre certaines propriétés essentielles, notamment que la fonction est prolongeable pour un nombre complexe $s$ quelconque, que elle vérifie une équation fonctionnelle, d'où il tire que les entiers $-2, -4, -6, \ldots$ sont tous des zéros. On les appelle les *zéros triviaux*.

# L'hypothèse (1859) de Riemann (1826-1886)

- Il en montre certaines propriétés essentielles, notamment que la fonction est prolongeable pour un nombre complexe $s$ quelconque, que elle vérifie une équation fonctionnelle, d'où il tire que les entiers $-2, -4, -6, \ldots$ sont tous des zéros. On les appelle les *zéros triviaux*.
- Il formule l'hypothèse: hormis les zéros triviaux, $\zeta$ *ne s'annule que sur la droite* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

# L'hypothèse (1859) de Riemann (1826-1886)

- L'importance de cette hypothèse est multiple. Par exemple, la formule d'Euler (1707-1783) dit

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. (Bien-sûr, Euler prédate Riemann, mais il avait déjà pu calculer la valeur de $\zeta$ en $2, 4, 6, \ldots$.)

# L'hypothèse (1859) de Riemann (1826-1886)

- L'importance de cette hypothèse est multiple. Par exemple, la formule d'Euler (1707-1783) dit

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. (Bien-sûr, Euler prédate Riemann, mais il avait déjà pu calculer la valeur de $\zeta$ en $2, 4, 6, \ldots$.)

- On voit que la fonction $\zeta$ décrit la répartition des premiers inférieurs à une borne donnée, et leur croissance quand cette borne tend vers l'infini.

# L'hypothèse (1859) de Riemann (1826-1886)

- L'importance de cette hypothèse est multiple. Par exemple, la formule d'Euler (1707-1783) dit

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. (Bien-sûr, Euler prédate Riemann, mais il avait déjà pu calculer la valeur de $\zeta$ en $2, 4, 6, \ldots$.)

- On voit que la fonction $\zeta$ décrit la répartition des premiers inférieurs à une borne donnée, et leur croissance quand cette borne tend vers l'infini.
- La localisation des zéros de $\zeta$ a donc des conséquences sur la répartition des premiers.

# L'hypothèse (1859) de Riemann (1826-1886)

- À ce jour non démontrée, elle est considérée comme un des problèmes fondamentaux non résolus: un des 23 problèmes fondamentaux programmatiques énoncés par Hilbert en 1900, un des 7 du millénaire par le Clay Institute en 2000, qui, en institut américain, la "met à prix": dollars contre preuve...mathématique.
- L'aventure extraordinaire que nous allons relater, à travers Weil et ses conjectures, commence là: avec ce mystère, et tout particulièrement avec ce nombre $\frac{1}{2}$.

# Un peu d'histoire avant la formulation des conjectures de Weil

- Emil Artin (1898-1962), fils d'une cantatrice à Vienne, formule en 1923, dans son Habilitation à l'université de Hamburg, un analogue de l'hypothèse de Riemann dans lequel le $\frac{1}{2}$ est le fil directeur:

## Un peu d'histoire avant la formulation des conjectures de Weil

- Emil Artin (1898-1962), fils d'une cantatrice à Vienne, formule en 1923, dans son Habilitation à l'université de Hamburg, un analogue de l'hypothèse de Riemann dans lequel le $\frac{1}{2}$ est le fil directeur:

# Un peu d'histoire avant la formulation des conjectures de Weil

- La constatation de base est que il y a une grande analogie entre le corps des rationnels $\mathbb{Q}$ et le corps $\mathbb{F}_p(t)$ des fonctions rationnelles en une variable sur le corps fini $\mathbb{F}_p$.

# Un peu d'histoire avant la formulation des conjectures de Weil

- La constatation de base est que il y a une grande analogie entre le corps des rationnels $\mathbb{Q}$ et le corps $\mathbb{F}_p(t)$ des fonctions rationnelles en une variable sur le corps fini $\mathbb{F}_p$.
- Au delà, il y a une grande analogie entre les corps qui sont des extensions finies de $\mathbb{Q}$, appelés *corps de nombres*, et ceux qui sont des extensions finies de $\mathbb{F}_p(t)$, appelés *corps de fonctions*.

# Un peu d'histoire avant la formulation des conjectures de Weil

- La constatation de base est que il y a une grande analogie entre le corps des rationnels $\mathbb{Q}$ et le corps $\mathbb{F}_p(t)$ des fonctions rationnelles en une variable sur le corps fini $\mathbb{F}_p$.
- Au delà, il y a une grande analogie entre les corps qui sont des extensions finies de $\mathbb{Q}$, appelés *corps de nombres*, et ceux qui sont des extensions finies de $\mathbb{F}_p(t)$, appelés *corps de fonctions*.
- Un corps fini est simplement la formalisation mathématique d'une congruence: le tour du cadran de notre montre compte 60 mns. Nous lisons: 55 mns $+10$ mns $=5$ mns. Nous calculons dans notre tête modulo 60.

# Un peu d'histoire avant la formulation des conjectures de Weil

- Modulo 2, c'est le $1+1=0$ de notre titre: tous les nombres pairs modulo 2 sont identifiés à 0, tous les impairs à 1. L'addition est simple: $0+0=0, 0+1=1$, et la multiplication aussi: $0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0$. L'ensemble $\{0,1\}$, muni de ces deux lois, forme un corps, que l'on dénote par $\mathbb{F}_2$: le seul élément qui n'est pas 0 est inversible: $1 \cdot 1 = 1$.

# Un peu d'histoire avant la formulation des conjectures de Weil

- Modulo 2, c'est le $1+1=0$ de notre titre: tous les nombres pairs modulo 2 sont identifiés à 0, tous les impairs à 1. L'addition est simple: $0+0=0, 0+1=1$, et la multiplication aussi: $0\cdot 0=0, 0\cdot 1=0$. L'ensemble $\{0,1\}$, muni de ces deux lois, forme un corps, que l'on dénote par $\mathbb{F}_2$: le seul élément qui n'est pas 0 est inversible: $1\cdot 1=1$.
- En général, on fait de même modulo $p$, $p$ premier: $\{0,1,2,\ldots,(p-1)\}$ avec les deux lois dérivées de celles des entiers en calculant modulo $p$, définit un corps, dénoté $\mathbb{F}_p$, et appelé *corps de congruence*.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- Évariste Galois (1811-1832) généralise, en un temps remarquablement bref avant sa mort tragique et prématurée en duel, les corps de congruences en la théorie des corps finis.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- Évariste Galois (1811-1832) généralise, en un temps remarquablement bref avant sa mort tragique et prématurée en duel, les corps de congruences en la théorie des corps finis.

- Voici un exemple simple de corps fini qui n'est pas un corps de congruence: $\mathbb{F}_9$, corps à 9 éléments: c'est l'ensemble des éléments $x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{F}_3$, et $i$ "imaginaire de Galois" satisfaisant $i^2 = -1$, c'est-à-dire $= 2$.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- Voici un exemple simple de corps fini qui n'est pas un corps de congruence: $\mathbb{F}_9$, corps à 9 éléments: c'est l'ensemble des éléments $x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{F}_3$, et $i$ "imaginaire de Galois" satisfaisant $i^2 = -1$, c'est-à-dire $= 2$.
- Galois démontre entre autres que pour n'importe quel nombre de la forme $q = p^n$ où $p$ est un premier et $n$ un nombre naturel, il existe un corps $\mathbb{F}_q$, unique (à isomorphisme près);

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- Voici un exemple simple de corps fini qui n'est pas un corps de congruence: $\mathbb{F}_9$, corps à 9 éléments: c'est l'ensemble des éléments $x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{F}_3$, et $i$ "imaginaire de Galois" satisfaisant $i^2 = -1$, c'est-à-dire $= 2$.
- Galois démontre entre autres que pour n'importe quel nombre de la forme $q = p^n$ où $p$ est un premier et $n$ un nombre naturel, il existe un corps $\mathbb{F}_q$, unique (à isomorphisme près);
- que ces corps sont emboîtés les uns dans les autres $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_{q^n} \subset \mathbb{F}_{q^{nm}} \ldots$;

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- Voici un exemple simple de corps fini qui n'est pas un corps de congruence: $\mathbb{F}_9$, corps à 9 éléments: c'est l'ensemble des éléments $x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{F}_3$, et $i$ "imaginaire de Galois" satisfaisant $i^2 = -1$, c'est-à-dire $= 2$.
- Galois démontre entre autres que pour n'importe quel nombre de la forme $q = p^n$ où $p$ est un premier et $n$ un nombre naturel, il existe un corps $\mathbb{F}_q$, unique (à isomorphisme près);
- que ces corps sont emboîtés les uns dans les autres $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_{q^n} \subset \mathbb{F}_{q^{nm}} \ldots$;
- qu'ils sont tous quotients de l'anneau des polynômes $\mathbb{F}_p[t]$ en une variable sur $\mathbb{F}_p$: $\mathbb{F}_p[t] \to \mathbb{F}_q$.

- On transpose la formule d'Euler à l'aide d'une analogie que j'essaie maintenant de suggérer.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- On transpose la formule d'Euler à l'aide d'une analogie que j'essaie maintenant de suggérer.
- On remplace $\mathbb{Z}$ par l'anneau $\mathbb{F}_p[t]$ des polynômes en une variable sur $\mathbb{F}_p$.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- On transpose la formule d'Euler à l'aide d'une analogie que j'essaie maintenant de suggérer.
- On remplace $\mathbb{Z}$ par l'anneau $\mathbb{F}_p[t]$ des polynômes en une variable sur $\mathbb{F}_p$.
- Les corps de congruence $\mathbb{F}_p$ sont tous des quotients de $\mathbb{Z}$ : $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- On transpose la formule d'Euler à l'aide d'une analogie que j'essaie maintenant de suggérer.
- On remplace $\mathbb{Z}$ par l'anneau $\mathbb{F}_p[t]$ des polynômes en une variable sur $\mathbb{F}_p$.
- Les corps de congruence $\mathbb{F}_p$ sont tous des quotients de $\mathbb{Z}$ : $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$
- $\rightsquigarrow$ On remplace les corps de congruence par les corps $\mathbb{F}_q$: nous avons vu que Galois les définit par une application quotient $\mathbb{F}_p[t] \xrightarrow{x} \mathbb{F}_q$. Ce $q$ est associé à $x$, on écrit $q(x)$.

- On remplace alors $\zeta$ de Riemann par

$$\prod_{\text{tous les } x} \left(\frac{1}{1-q(x)^{-s}}\right).$$

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- On remplace alors $\zeta$ de Riemann par

$$\prod_{\text{tous les } x} \left(\frac{1}{1-q(x)^{-s}}\right).$$

- On vient de définir la fonction zêta de la droite affine sur le corps $\mathbb{F}_p$. (Les $\{x\}$ sont appelés les *points fermés* de la droite affine.)

- De façon générale, on définit une "courbe" $X$ sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- De façon générale, on définit une "courbe" $X$ sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.
- On peut y penser comme système fini d'équations polynomiales $X: \sum a_{i_0 i_1,\ldots,i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}$, où les coefficients $a_{i_0 i_1 \ldots i_d}$ sont dans le corps fini $\mathbb{F}_q$.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- De façon générale, on définit une "courbe" $X$ sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.
- On peut y penser comme système fini d'équations polynomiales $X: \ \sum a_{i_0 i_1, \ldots, i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}$, où les coefficients $a_{i_0 i_1 \ldots i_d}$ sont dans le corps fini $\mathbb{F}_q$.
- Dans ce langage, les *points* $\{x\}$ à valeur dans $\mathbb{F}_{q^m}$ sont les solutions $(x_0, x_1, \ldots, x_d)$ avec $x_i \in \mathbb{F}_{q^m}, \ m \geq 1$.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- De façon générale, on définit une "courbe" $X$ sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.
- On peut y penser comme système fini d'équations polynomiales $X: \sum a_{i_0 i_1 \dots, i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}$, où les coefficients $a_{i_0 i_1 \dots i_d}$ sont dans le corps fini $\mathbb{F}_q$.
- Dans ce langage, les *points* $\{x\}$ à valeur dans $\mathbb{F}_{q^m}$ sont les solutions $(x_0, x_1, \dots, x_d)$ avec $x_i \in \mathbb{F}_{q^m}, \;\; m \geq 1$.
- Il n'y en n'a qu'un nombre fini car $\mathbb{F}_{q^m}$ est fini. La cardinalité de cet ensemble est donc un invariant intéressant.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- De façon générale, on définit une "courbe" $X$ sur un corps fini $\mathbb{F}_q$.
- On peut y penser comme système fini d'équations polynomiales $X: \sum a_{i_0 i_1 \ldots, i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}$, où les coefficients $a_{i_0 i_1 \ldots i_d}$ sont dans le corps fini $\mathbb{F}_q$.
- Dans ce langage, les *points* $\{x\}$ à valeur dans $\mathbb{F}_{q^m}$ sont les solutions $(x_0, x_1, \ldots, x_d)$ avec $x_i \in \mathbb{F}_{q^m},\ m \geq 1$.
- Il n'y en n'a qu'un nombre fini car $\mathbb{F}_{q^m}$ est fini. La cardinalité de cet ensemble est donc un invariant intéressant.
- Comme on a vu que les corps finis sont emboîtés, $\mathbb{F}_{q^m} \supset \mathbb{F}_{q^a}$ si $a$ divise $m$, il y a un $q^m$ minimal associé à $x$, que l'on dénote par $q(x)$. Fixer $q(x)$ évite les redondances dans le comptage.

- Il y a une condition supplémentaire qui justifie la notation de "courbe": en gros, le nombre de variables excède de un le nombre d'équations.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- On définit la fonction zêta $\zeta(X,s)$ de la même façon:

$$\prod_{\text{tous les } x} \left(\frac{1}{1-q(x)^{-s}}\right).$$

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- On définit la fonction zêta $\zeta(X, s)$ de la même façon:

$$\prod_{\text{tous les } x} \left(\frac{1}{1 - q(x)^{-s}}\right).$$

- Maintenant, cette fonction $\zeta$ permet de calculer *le nombre de points pour lesquels $q(x)$ est inférieur à une borne donnée, et leur croissance quand cette borne tend vers l'infini.*

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- *L'analogie du* $\frac{1}{2}$ maintenant est (Artin): un zéro de $\zeta(X, s)$ devrait avoir la propriété (conjecturale) que sa partie réelle est $\frac{1}{2}$.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- *L'analogie du* $\frac{1}{2}$ maintenant est (Artin): un zéro de $\zeta(X, s)$ devrait avoir la propriété (conjecturale) que sa partie réelle est $\frac{1}{2}$.
- *Entorse historique*: Artin parle de corps de fonctions et non de courbes, de valuations et non de points. C'est la même chose, le langage géométrique nous ramène à Riemann, une belle raison de l'utiliser.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- *L'analogie du* $\frac{1}{2}$ maintenant est (Artin): un zéro de $\zeta(X, s)$ devrait avoir la propriété (conjecturale) que sa partie réelle est $\frac{1}{2}$.
- *Entorse historique*: Artin parle de corps de fonctions et non de courbes, de valuations et non de points. C'est la même chose, le langage géométrique nous ramène à Riemann, une belle raison de l'utiliser.
- Artin pose cette conjecture dans sa thèse (1921), la démontre (1929) pour courbes d'équation $y^2 = f(x)$ (on dit "hyperelliptique" de nos jours), dans certains cas, en utilisant ce qu'on appelle une loi de réciprocité.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- F.K. Schmidt (1931) montre pour toutes les courbes et tous les corps finis que la fonction zêta n'est pas "sauvage", elle est *rationnelle* en la variable $U = q^{-s}$, c'est-à-dire le quotient de deux polynômes en $U$. C'est la rationalité de notre titre.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- F.K. Schmidt (1931) montre pour toutes les courbes et tous les corps finis que la fonction zêta n'est pas "sauvage", elle est *rationnelle* en la variable $U = q^{-s}$, c'est-à-dire le quotient de deux polynômes en $U$. C'est la rationalité de notre titre.
- Ceci diffère fortement de la fonction zêta de Riemann, qui elle est plus compliquée qu'une fonction rationnelle.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- F.K. Schmidt (1931) montre pour toutes les courbes et tous les corps finis que la fonction zêta n'est pas "sauvage", elle est *rationnelle* en la variable $U = q^{-s}$, c'est-à-dire le quotient de deux polynômes en $U$. C'est la rationalité de notre titre.
- Ceci diffère fortement de la fonction zêta de Riemann, qui elle est plus compliquée qu'une fonction rationnelle.
- De plus, il montre qu'une certaine symétrie de cette fonction existe, appelée *équation fonctionnelle*, qui elle est analogue à celle vérifiée par la fonction zêta de Riemann. Elle relie $\zeta(s)$ et $\zeta(1-s)$. Il utilise pour ce le théorème de Riemann-Roch.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- Helmut Hasse (1934) la démontre pour les courbes d'équation $x_1^2 = f(x_0)$, où $f$ est un polynôme de degré 3, à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. On les appelle les courbes de genre 1.

# Un peu d'histoire avant les conjectures de Weil

- Helmut Hasse (1934) la démontre pour les courbes d'équation $x_1^2 = f(x_0)$, où $f$ est un polynôme de degré 3, à coefficients dans $\mathbb{F}_q$. On les appelle les courbes de genre 1.
- Si on remplace $\mathbb{F}_q$ par le corps $\mathbb{C}$ des complexes, et qu'on le dessine (on a donc 4 dimensions réelles....) on obtient une bouée, c'est-à-dire un tore.

# André Weil (Paris 1906-Princeton 1998)

# André Weil (Paris 1906-Princeton 1998)

- Issu d'une famille juive alsacienne assimilée, de grande ouverture intellectuelle, venue à Paris pour fuir l'Alsace-Lorraine allemande, André Weil, qui, dit-on, à la fin de sa vie parlait une douzaine de langues vivantes, le grec, le latin et le sanskrit, arrive aux mathématiques très jeune (il est entré à l'Ecole Normale Supérieure à 16 ans).

# André Weil: les années de formation

- En arithmétique et algèbre, l'école allemande, notamment Göttingen, était le centre indiscuté.

# André Weil: les années de formation

- En arithmétique et algèbre, l'école allemande, notamment Göttingen, était le centre indiscuté.
- Avec une bourse Rockefeller, il va sillonner l'Allemagne, contacter (énoncés en vrac) Courant, Siegel, Hilbert, van der Waerden, Grell, Dehn, Ostrowksi, Emmy Noether ( *"mère poule protectrice"*...), Alexandrov, Hellinger, Epstein, Szasz, Toeplitz, Hartogs, Hopf. L'auditeur mathématicien ne peut que rêver de tous ces noms plus prestigieux les uns que les autres discutant avec un jeune homme d'une vingtaine d'années.

# André Weil: les années de formation

- En arithmétique et algèbre, l'école allemande, notamment Göttingen, était le centre indiscuté.
- Avec une bourse Rockefeller, il va sillonner l'Allemagne, contacter (énoncés en vrac) Courant, Siegel, Hilbert, van der Waerden, Grell, Dehn, Ostrowksi, Emmy Noether ( *"mère poule protectrice"*...), Alexandrov, Hellinger, Epstein, Szasz, Toeplitz, Hartogs, Hopf. L'auditeur mathématicien ne peut que rêver de tous ces noms plus prestigieux les uns que les autres discutant avec un jeune homme d'une vingtaine d'années.
- Sauf erreur de ma part, ses mémoires ne relatent ni une rencontre avec Emil Artin, ni une avec Helmut Hasse (*voir plus haut leur rôle dans la genèse du problème)*.

# André Weil: les années de formation

- En arithmétique et algèbre, l'école allemande, notamment Göttingen, était le centre indiscuté.
- Avec une bourse Rockefeller, il va sillonner l'Allemagne, contacter (énoncés en vrac) Courant, Siegel, Hilbert, van der Waerden, Grell, Dehn, Ostrowksi, Emmy Noether ( *"mère poule protectrice"*...), Alexandrov, Hellinger, Epstein, Szasz, Toeplitz, Hartogs, Hopf. L'auditeur mathématicien ne peut que rêver de tous ces noms plus prestigieux les uns que les autres discutant avec un jeune homme d'une vingtaine d'années.
- Sauf erreur de ma part, ses mémoires ne relatent ni une rencontre avec Emil Artin, ni une avec Helmut Hasse (*voir plus haut leur rôle dans la genèse du problème)*.
- Il va aussi étudier la géométrie algébrique "italienne" auprès de leurs fondateurs, Severi, Enriques.

# André Weil: les années de formation

- À Paris, Émile Picard, à l'époque l'un des analystes les plus importants en France, refuse d'être le rapporteur de sa thèse "L'arithmétique sur les courbes algébriques",

# André Weil: les années de formation

- À Paris, Émile Picard, à l'époque l'un des analystes les plus importants en France, refuse d'être le rapporteur de sa thèse "L'arithmétique sur les courbes algébriques",
- mais le recommande à René Garnier. *"J'eu donc un rapporteur, consciencieux autant que bienveillant; il ne remarqua pas quelques lacunes dans les démonstrations mais me donna d'utiles conseils sur les virgules..."*

# André Weil: les années de formation

- À Paris, Émile Picard, à l'époque l'un des analystes les plus importants en France, refuse d'être le rapporteur de sa thèse "L'arithmétique sur les courbes algébriques",
- mais le recommande à René Garnier. *"J'eu donc un rapporteur, consciencieux autant que bienveillant; il ne remarqua pas quelques lacunes dans les démonstrations mais me donna d'utiles conseils sur les virgules..."*
- Il aura le titre en 1928. Sa thèse généralise le théorème de Mordell (1922) (appelé de nos jours le théorème de Mordell-Weil) au cas des courbes de genre $> 1$. Elle traîte, sur un corps de nombres, non vraiment de points fermés, mais de ce qu'on appelle le groupe des diviseurs de degré 0 (que je n'explique pas) sur ces courbes. Il reprend à la fin de sa thèse la conjecture énoncée par Mordell.

# André Weil: les années de formation

- À Paris, Émile Picard, à l'époque l'un des analystes les plus importants en France, refuse d'être le rapporteur de sa thèse "L'arithmétique sur les courbes algébriques",
- mais le recommande à René Garnier. *"J'eu donc un rapporteur, consciencieux autant que bienveillant; il ne remarqua pas quelques lacunes dans les démonstrations mais me donna d'utiles conseils sur les virgules..."*
- Il aura le titre en 1928. Sa thèse généralise le théorème de Mordell (1922) (appelé de nos jours le théorème de Mordell-Weil) au cas des courbes de genre $> 1$. Elle traîte, sur un corps de nombres, non vraiment de points fermés, mais de ce qu'on appelle le groupe des diviseurs de degré 0 (que je n'explique pas) sur ces courbes. Il reprend à la fin de sa thèse la conjecture énoncée par Mordell.
- Celle-ci ne sera démontrée qu'en 1983 par Gerd Faltings.

# Gerd Faltings (Gelsenkirchen 1954-); médaille Fields 1986

- Son immense culture, sa curiosité intellectuelle vont de pair avec la joie du voyage. Il se retrouve à 24 ans à construire le département de mathématiques de l'université musulmane d'Aligarh. Il y parfait entre autres son sanskrit.

# André Weil: 1940

- En janvier 1940, il est arrêté. Il a fui la guerre contre l'Allemagne nazie, a été rattrapé au terme d'un périple que je ne relate pas, il est déserteur. *"Le Dharma de Gauguin a été la peinture. Le mien, tel que je le voyais en 1938, me semblait manifeste: c'était de faire des mathématiques tant que je m'en sentais capable. Le péché eût été de m'en laisser détourner."*

# André Weil: 1940

- En janvier 1940, il est arrêté. Il a fui la guerre contre l'Allemagne nazie, a été rattrapé au terme d'un périple que je ne relate pas, il est déserteur. *"Le Dharma de Gauguin a été la peinture. Le mien, tel que je le voyais en 1938, me semblait manifeste: c'était de faire des mathématiques tant que je m'en sentais capable. Le péché eût été de m'en laisser détourner."*
- Il est condamné en mai à 5 ans de prison pour insoumission, peine immédiatement suspendue pour l'incorporation dans un régiment en Normandie, qui se termine à la démobilisation en un passage en Angleterre.

# André Weil: 1940

- En janvier 1940, il est arrêté. Il a fui la guerre contre l'Allemagne nazie, a été rattrapé au terme d'un périple que je ne relate pas, il est déserteur. *"Le Dharma de Gauguin a été la peinture. Le mien, tel que je le voyais en 1938, me semblait manifeste: c'était de faire des mathématiques tant que je m'en sentais capable. Le péché eût été de m'en laisser détourner."*
- Il est condamné en mai à 5 ans de prison pour insoumission, peine immédiatement suspendue pour l'incorporation dans un régiment en Normandie, qui se termine à la démobilisation en un passage en Angleterre.
- Après la capitulation française, il rentre chercher sa femme, épousée 3 ans (1937) avant après le divorce de celle-ci d'un autre membre fondateur (1934) de *Bourbaki*.

# André Weil: 1940

- Ils embarquent pour les USA en janvier 1941. Son malheur a duré un an. Il ne reviendra plus jamais s'établir en France.

- Ils embarquent pour les USA en janvier 1941. Son malheur a duré un an. Il ne reviendra plus jamais s'établir en France.
- À la prison militaire Bonne Nouvelle à Rouen, il a une cellule seul et a le droit de se faire parvenir les livres qu'il souhaite, délivrés par sa femme et sa famille.

# Le premier texte sur les courbes: 1940

- Il entame la rédaction de son premier texte sur les courbes: "Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini".

# Le premier texte sur les courbes: 1940

- Il entame la rédaction de son premier texte sur les courbes: "Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini".
- Il pense démontrer la conjecture d'Artin pour toutes les courbes et tous les corps finis, a besoin pour cela d'un "lemme fondamental".

# Le premier texte sur les courbes: 1940

- Il entame la rédaction de son premier texte sur les courbes: "Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini".
- Il pense démontrer la conjecture d'Artin pour toutes les courbes et tous les corps finis, a besoin pour cela d'un "lemme fondamental".
- Il presse Henri Cartan de rechercher en bibliothèque ce que Hasse a écrit sur ce lemme fondamental en genre 1 *"je crois toucher à des résultats très importants sur la fonction $\zeta$...."*

# Le premier texte sur les courbes: 1940

- Il entame la rédaction de son premier texte sur les courbes: "Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini".
- Il pense démontrer la conjecture d'Artin pour toutes les courbes et tous les corps finis, a besoin pour cela d'un "lemme fondamental".
- Il presse Henri Cartan de rechercher en bibliothèque ce que Hasse a écrit sur ce lemme fondamental en genre 1 *"je crois toucher à des résultats très importants sur la fonction $\zeta$...."*
- écrit le 8 avril 1940 à Cartan: *"j'ai expédié la note -NdR: aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris-sans attendre d'avoir démontré le lemme fondamental...Hasse n'a plus qu'à se pendre car j'y résouds, (sous réserve de mon lemme), TOUS les principaux problèmes de la théorie"* .

# Le premier texte sur les courbes: 1940

- Il entame la rédaction de son premier texte sur les courbes: "Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini".
- Il pense démontrer la conjecture d'Artin pour toutes les courbes et tous les corps finis, a besoin pour cela d'un "lemme fondamental".
- Il presse Henri Cartan de rechercher en bibliothèque ce que Hasse a écrit sur ce lemme fondamental en genre 1 *"je crois toucher à des résultats très importants sur la fonction $\zeta$...."*
- écrit le 8 avril 1940 à Cartan: *"j'ai expédié la note -NdR: aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris-sans attendre d'avoir démontré le lemme fondamental...Hasse n'a plus qu'à se pendre car j'y résouds, (sous réserve de mon lemme), TOUS les principaux problèmes de la théorie"* .
- Hasse, nationaliste allemand, a vu son adhésion au parti nazi refusée au motif d'origines juives....

# Le premier texte sur les courbes: 1940

- et écrit une réponse à Gaston Julia (éditeur), en français: *“Avez-vous l’idée d’un ”profiteur de guerre spirituel”? Il me semble que notre “ami” André Weil soit un tel. ....Pendant que toutes les forces spirituelles de l’Europe étaient stérilisées par la guerre, Weil semble avoir conçu l’idée d’une démonstration de cette hypothèse-là. Sa première publication là-dessus, la note que vous m’avez procurée, contient toutefois un lemme sans démonstration...”*

# Le premier texte sur les courbes: 1940

- et écrit une réponse à Gaston Julia (éditeur), en français: *"Avez-vous l'idée d'un "profiteur de guerre spirituel"? Il me semble que notre "ami" André Weil soit un tel. ....Pendant que toutes les forces spirituelles de l'Europe étaient stérilisées par la guerre, Weil semble avoir conçu l'idée d'une démonstration de cette hypothèse-là. Sa première publication là-dessus, la note que vous m'avez procurée, contient toutefois un lemme sans démonstration..."*
- qui le restera: Weil l'année suivante change sa démonstration. Elle ne sera entièrement rédigée et publiée chez Hermann que en 1948.

# Le premier texte sur les courbes: 1940

- et écrit une réponse à Gaston Julia (éditeur), en français: *"Avez-vous l'idée d'un "profiteur de guerre spirituel"? Il me semble que notre "ami" André Weil soit un tel. ....Pendant que toutes les forces spirituelles de l'Europe étaient stérilisées par la guerre, Weil semble avoir conçu l'idée d'une démonstration de cette hypothèse-là. Sa première publication là-dessus, la note que vous m'avez procurée, contient toutefois un lemme sans démonstration..."*
- qui le restera: Weil l'année suivante change sa démonstration. Elle ne sera entièrement rédigée et publiée chez Hermann que en 1948.
- Il y étudie l'anneau des correspondances sur les courbes: une idée centrale, qui par exemple jouera un rôle essentiel dans les conjectures motiviques (Bloch-Beilinson) dans les années 80.

# NUMBERS OF SOLUTIONS OF EQUATIONS IN FINITE FIELDS

ANDRÉ WEIL

The equations to be considered here are those of the type

$$a_0x_0^{n_0} + a_1x_1^{n_1} + \cdots + a_rx_r^{n_r} = b. \tag{1}$$

Such equations have an interesting history. In art. 358 of the *Disquisitiones* [1 a],[1] Gauss determines the Gaussian sums (the so-called cyclotomic "periods") of order 3, for a prime of the form $p=3n+1$, and at the same time obtains the numbers of solutions for all congruences $ax^3-by^3\equiv 1 \pmod p$. He draws attention himself to the elegance of his method, as well as to its wide scope; it is only much later, however, viz. in his first memoir on biquadratic residues [1b], that he gave in print another application of the same method; there he treats the next higher case, finds the number of solutions of any congruence $ax^4-by^4\equiv 1 \pmod p$, for a prime of the form $p=4n+1$, and derives from this the biquadratic character of 2 mod $p$, this being the ostensible purpose of the whole highly ingenious and intricate investigation. As an incidental consequence ("*coronidis loco*," p. 89), he also gives in substance the number of solutions of any congruence $y^2\equiv ax^4-b \pmod p$; this result includes as a special case the theorem stated as a conjecture ("*observatio per inductionem facta gravissima*") in the last entry of his *Tagebuch* [1c];[2] and it implies the truth of what has lately become known as the Riemann hypothesis, for the function-field defined by that equation over the prime field of $p$ elements.

Gauss' procedure is wholly elementary, and makes no use of the Gaussian sums, since it is rather his purpose to apply it to the determination of such sums. If one tries to apply it to more general cases, however, calculations soon become unwieldy, and one realizes the necessity of inverting it by taking Gaussian sums as a starting point. The means for doing so were supplied, as early as 1827, by Jacobi, in a letter to Gauss [2a] (cf. [2b]). But Lebesgue, who in 1837 devoted two papers [3a, b] to the case $n_0=\cdots=n_r$ of equation (1), did not

Received by the editors October 2, 1948; published with the invited addresses for reasons of space and editorial convenience.

[1] Numbers in brackets refer to the bibliography at the end of the paper.

[2] It is surprising that this should have been overlooked by Dedekind and other authors who have discussed that conjecture (cf. M. Deuring, Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ. vol. 14 (1941) pp. 197–198).

# LE texte: 1948, publié 1949

- écrit à Chicago, publié au Bull. Am. Math. Soc.

# LE texte: 1948, publié 1949

- écrit à Chicago, publié au Bull. Am. Math. Soc.
- pour la première fois, Weil va au-delà des courbes: au-delà signifie que *la dimension est plus grande que* 1: le nombre de variables définissant les équations considérées est grand comparé au nombre d'équations, ici une seule.

# LE texte: 1948, publié 1949

- écrit à Chicago, publié au Bull. Am. Math. Soc.
- pour la première fois, Weil va au-delà des courbes: au-delà signifie que *la dimension est plus grande que* 1: le nombre de variables définissant les équations considérées est grand comparé au nombre d'équations, ici une seule.
- Il considère des exemples classiques $\sum a_i x_i^{n_i} = b,\ a_i, b \in \mathbb{Z}$, dont il dit qu'elles furent essentiellement traîtées par d'autres, que une des méthodes centrales remonte à Gauß.

# LE texte: 1948, publié 1949

- écrit à Chicago, publié au Bull. Am. Math. Soc.
- pour la première fois, Weil va au-delà des courbes: au-delà signifie que *la dimension est plus grande que* 1: le nombre de variables définissant les équations considérées est grand comparé au nombre d'équations, ici une seule.
- Il considère des exemples classiques $\sum a_i x_i^{n_i} = b, \ a_i, b \in \mathbb{Z}$, dont il dit qu'elles furent essentiellement traîtées par d'autres, que une des méthodes centrales remonte à Gauß.
- Il fait des calculs difficiles pour établir sur ces exemples le nombre de solutions dans $\mathbb{F}_q$.

- Fort de l'évidence numérique acquise par ces résultats, il formule les conjectures suivantes, de nos jours appelées **conjectures de Weil**:

$$\sum_{h=0}^{r-1} X^{2h} + A \cdot X^{r-1}.$$

This, and other examples which we cannot discuss here, seem to lend some support to the following conjectural statements, which are known to be true for curves, but which I have not so far been able to prove for varieties of higher dimension.

Let $V$ be a variety without singular points, of dimension $n$, defined over a finite field $k$ with $q$ elements. Let $N_\nu$ be the number of rational points on $V$ over the extension $k_\nu$ of $k$ of degree $\nu$. Then we have

$$\sum_1^\infty N_\nu U^{\nu-1} = \frac{d}{dU} \log Z(U),$$

where $Z(U)$ is a rational function in $U$, satisfying a functional equation

$$Z\left(\frac{1}{q^n U}\right) = \pm\, q^{n\chi/2} U^\chi Z(U),$$

with $\chi$ equal to the Euler-Poincaré characteristic of $V$ (intersection-number of the diagonal with itself on the product $V \times V$).

Furthermore, we have:

$$Z(U) = \frac{P_1(U)P_3(U)\cdots P_{2n-1}(U)}{P_0(U)P_2(U)\cdots P_{2n}(U)},$$

with $P_0(U)=1-U$, $P_{2n}(U)=1-q^n U$, and, for $1 \leqq h \leqq 2n-1$:

$$P_h(U) = \prod_{i=1}^{B_h} (1 - \alpha_{hi} U)$$

where the $\alpha_{hi}$ are algebraic integers of absolute value $q^{h/2}$.

Finally, let us call the degrees $B_h$ of the polynomials $P_h(U)$ the *Betti numbers* of the variety $V$; the Euler-Poincaré characteristic $\chi$ is then expressed by the usual formula $\chi = \sum_h (-1)^h B_h$. The evidence at hand seems to suggest that, if $\overline{V}$ is a variety without singular points, defined over a field $K$ of algebraic numbers, the Betti numbers of the varieties $V_\mathfrak{p}$, derived from $\overline{V}$ by reduction modulo a prime ideal $\mathfrak{p}$ in $K$, are equal to the Betti numbers of $\overline{V}$ (considered as a variety over complex numbers) in the sense of combinatorial topology, for all except at most a finite number of prime ideals $\mathfrak{p}$. For instance, consider the Grassmann variety $G_{m,r}$, the points of which are the $r$-dimensional linear varieties in a projective $m$-dimensional space, over a field with $q$ elements. The number of rational points on the variety is easily seen to be $F(q)$, where $F$ is the polynomial defined by



$$F(X) = \frac{(X^{m+1}-1)(X^{m+1}-X)\cdots(X^{m+1}-X^r)}{(X^{r+1}-1)(X^{r+1}-X)\cdots(X^{r+1}-X^r)}.$$

Then, if the above conjectures are true, the Poincaré polynomial of the Grassmann variety $G_{m,r}$ over complex numbers must be $F(X^2)$. This is indeed so, as can easily be verified from the well-known results of Ehresmann [8].[5]

## Bibliography

1. C. F. Gauss, *Werke*: (a) vol. I, pp. 445–449; (b) vol. II, pp. 67–92; (c) vol. $X_1$, p. 571.
2. C. G. Jacobi, *Gesammelte Werke*: (a) vol. VII, pp. 393-400; (b) vol. VI, pp. 254–274.
3. V. A. Lebesgue: (a) J. Math. Pures Appl. vol. 2 (1837) pp. 253–292; (b) J. Math. Pures Appl. vol. 3 (1838) pp. 113–144.
4. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Math. Zeit. vol. 12 (1922) pp. 161–188.
5. H. Davenport and H. Hasse, J. Reine Angew. Math. vol. 172 (1935) pp. 151–182.
6. L. K. Hua and H. S. Vandiver, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. vol. 34 (1948) pp. 258–263.
7. L. Stickelberger, Math. Ann. vol. 37 (1890) pp. 321–367.
8. Ch. Ehresmann, Ann. of Math. vol. 35 (1934) pp. 396–443.

The University of Chicago

[5] *Added in proof*. Results, substantially identical to our formula (3), have just been published by L. K. Hua and H. S. Vandiver, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. vol. 35 (1949) pp. 94–99.

# LE texte: à la recherche du $\frac{1}{2}$ perdu et de sa généralisation

- Les objets considérés sont des variétés, c'est-à-dire des systèmes finis d'équations polynomiales $X: \sum a_{i_0 i_1 \ldots . i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}$, où les coefficients $a_{i_0 i_1 \ldots i_d}$ sont dans le corps fini $\mathbb{F}_q$.

# LE texte: à la recherche du $\frac{1}{2}$ perdu et de sa généralisation

- Les objets considérés sont des variétés, c'est-à-dire des systèmes finis d'équations polynomiales $X: \sum a_{i_0 i_1,\ldots,i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}$, où les coefficients $a_{i_0 i_1 \ldots i_d}$ sont dans le corps fini $\mathbb{F}_q$.
- Je passe sous silence les notions de lissité et de projectivité.

- Les objets considérés sont des variétés, c'est-à-dire des systèmes finis d'équations polynomiales $X: \sum a_{i_0 i_1, \dots, i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}$, où les coefficients $a_{i_0 i_1 \dots i_d}$ sont dans le corps fini $\mathbb{F}_q$.
- Je passe sous silence les notions de lissité et de projectivité.
- Comme nous l'avons déjà vu pour les courbes, les points à valeur dans $\mathbb{F}_{q^m}$ sont simplement les solutions $(x_0, x_1, \dots, x_d)$ avec $x_i \in \mathbb{F}_{q^m}$,

# LE texte: à la recherche du $\frac{1}{2}$ perdu et de sa généralisation

- Les objets considérés sont des variétés, c'est-à-dire des systèmes finis d'équations polynomiales $X : \sum a_{i_0 i_1,...,i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_d^{i_d}$, où les coefficients $a_{i_0 i_1 \dots i_d}$ sont dans le corps fini $\mathbb{F}_q$.
- Je passe sous silence les notions de lissité et de projectivité.
- Comme nous l'avons déjà vu pour les courbes, les points à valeur dans $\mathbb{F}_{q^m}$ sont simplement les solutions $(x_0, x_1, \dots, x_d)$ avec $x_i \in \mathbb{F}_{q^m}$,
- et pour un tel point, on associe le $q(x)$ minimal tel que $x$ soit un point à valuer dans $\mathbb{F}_{q(x)}$.

## LE texte: à la recherche du $\frac{1}{2}$ perdu et de sa généralisation

- Weil *définit* la fonction zêta par la formule que nous avons donnée dans le cas des courbes,

$$\zeta(X,s) = \prod_{\text{tous les } x} \left(\frac{1}{1-q(x)^{-s}}\right)$$

- Weil *définit* la fonction zêta par la formule que nous avons donnée dans le cas des courbes,

$$\zeta(X,s) = \prod_{\text{tous les } x} \left(\frac{1}{1-q(x)^{-s}}\right)$$

- Sur la copie de la page 11 de son article, vous voyez que la définition semble différer de celle-ci; il s'agit en fait juste du changement de variable $U = q^{-s}$.

## LE texte: à la recherche du $\frac{1}{2}$ perdu et de sa généralisation

- Weil prédit que $\zeta(X,s)$ est une fonction *rationnelle* en $U = q^{-s}$, i.e. quotient de deux polynômes $\zeta(X,s) = Z(X,U) = \frac{P_1(U)\cdot P_3(U)\cdots P_{2h-1}(U)}{P_0(U)\cdot P_2(U)\cdots P_{2h}(U)}$.

# LE texte: à la recherche du $\frac{1}{2}$ perdu et de sa généralisation

- Weil prédit que $\zeta(X, s)$ est une fonction *rationnelle* en $U = q^{-s}$, i.e. quotient de deux polynômes $\zeta(X, s) = Z(X, U) = \frac{P_1(U) \cdot P_3(U) \cdots P_{2h-1}(U)}{P_0(U) \cdot P_2(U) \cdots P_{2h}(U)}$.
- Si les coefficients $a_{i_0 i_1 \ldots i_d}$ proviennent par congruence de $\mathbb{Z}$, à l'instar des exemples traîtés dans l'article, il prédit que les facteurs de ces polynômes s'interprètent en *termes purement topologiques*, d'où la théorie des nombres a disparu.

# LE texte: à la recherche du $\frac{1}{2}$ perdu et de sa généralisation

- Weil prédit que $\zeta(X,s)$ est une fonction *rationnelle* en $U = q^{-s}$, i.e. quotient de deux polynômes $\zeta(X,s) = Z(X,U) = \frac{P_1(U)\cdot P_3(U)\cdots P_{2h-1}(U)}{P_0(U)\cdot P_2(U)\cdots P_{2h}(U)}$.
- Si les coefficients $a_{i_0 i_1 \ldots i_d}$ proviennent par congruence de $\mathbb{Z}$, à l'instar des exemples traîtés dans l'article, il prédit que les facteurs de ces polynômes s'interprètent en *termes purement topologiques*, d'où la théorie des nombres a disparu.
- Il prédit que $\zeta$ satisfait une *équation fonctionnelle*

$$Z(\frac{1}{q^{h(X)}U}) = \pm q^{h(X)\cdot\frac{\chi}{2}} \cdot U^{\chi} \cdot Z(U)$$

où il définit $\chi$, de nouveau un invariant topologique, et où la *dimension* $h(X)$ est (très approximativement) le nombre de variables moins le nombre d'équations.

- Il prédit que les polynômes $B_\omega(U),\ \omega = 0, 1, \ldots, 2h(X)$, sont de la forme $B_\omega(U) = \prod_i (1 - \alpha_{\omega i} U)$ où les $\alpha_{\omega j}$ sont dans un corps de nombres et où leur valeur absolue est $q^{\frac{\omega}{2}}$, i.e. ils sont tous sur le cercle centré en 0 de rayon $q^{\frac{\omega}{2}}$ (donc en $s$: $\mathrm{Re}(s) = \frac{\omega}{2}$).

- Il prédit que les polynômes $B_\omega(U)$, $\omega = 0, 1, \ldots, 2h(X)$, sont de la forme $B_\omega(U) = \prod_i (1 - \alpha_{\omega i} U)$ où les $\alpha_{\omega j}$ sont dans un corps de nombres et où leur valeur absolue est $q^{\frac{\omega}{2}}$, i.e. ils sont tous sur le cercle centré en 0 de rayon $q^{\frac{\omega}{2}}$ (donc en $s$: $\mathrm{Re}(s) = \frac{\omega}{2}$).
- **Donc** $\frac{1}{2} \rightsquigarrow \frac{\omega}{2}$, soit $1 \rightsquigarrow \omega$ où $\omega$ est entre 0 et deux fois la **dimension** $h(X)$!

# Le lecteur est saisi

- Ce texte de conjectures est d'une **sobriété frappante**: il vient après ces quelques calculs numériques, sans transition.

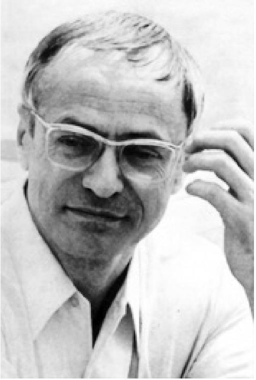
# Le lecteur est saisi

- Ce texte de conjectures est d'une **sobriété frappante**: il vient après ces quelques calculs numériques, sans transition.
- Il est **programmatique**: Weil suggère que une des clefs sera de trouver un invariant topologique d'un type nouveau sur de telles variétés définies sur $\mathbb{F}_q$, sans supposer que au départ, on part d'équations à coefficients entiers.

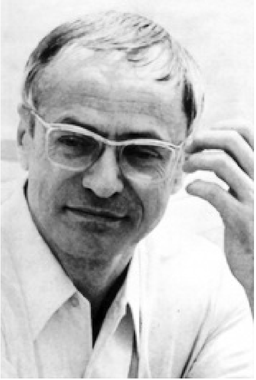
# Le lecteur est saisi

- Ce texte de conjectures est d'une **sobriété frappante**: il vient après ces quelques calculs numériques, sans transition.
- Il est **programmatique**: Weil suggère que une des clefs sera de trouver un invariant topologique d'un type nouveau sur de telles variétés définies sur $\mathbb{F}_q$, sans supposer que au départ, on part d'équations à coefficients entiers.
- Il ne donne **aucune indication** de comment on pourrait arriver à une telle théorie: on a l'impression que Weil rêve à voix haute.

# Jean-Pierre Serre (Bages 1926-); médaille Fields 1954, prix Abel 2003



# Jean-Pierre Serre (Bages 1926-); médaille Fields 1954, prix Abel 2003



- Né dans une famille protestante, de parents pharmaciens, un des plus grands mathématiciens des 20/21ième siècles.

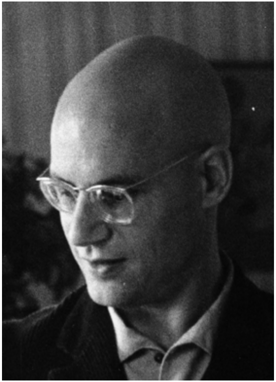
# Jean-Pierre Serre (Bages 1926-); médaille Fields 1954

- Donne une première définition possible de cet invariant topologique au milieu des années 50, appelée *cohomologie des vecteurs de Witt* et étudie le premier des propriétés d'invariance topologique de variétés par certaines opérations, notamment par *revêtements étales*.

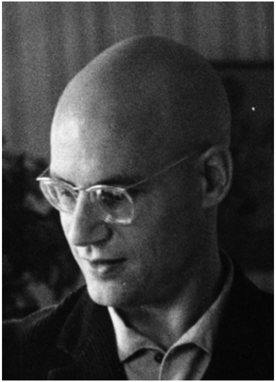
# Jean-Pierre Serre (Bages 1926-); médaille Fields 1954

- Donne une première définition possible de cet invariant topologique au milieu des années 50, appelée *cohomologie des vecteurs de Witt* et étudie le premier des propriétés d'invariance topologique de variétés par certaines opérations, notamment par *revêtements étales*.
- Énonce en 1960 ce que nous appelons un *analogue* des conjectures de Weil dans un cadre complexe (donc si on veut en supposant résolu le problème de l'existence de cet invariant topologique) et le démontre.

# Alexander Grothendieck (Berlin 1928-); médaille Fields 1966



# Alexander Grothendieck (Berlin 1928-); médaille Fields 1966



- Né à Berlin d'un père juif russe, d'une mère protestante de Hamburg, tous les deux anarchistes.

# Alexander Grothendieck (Berlin 1928-); médaille Fields 1966

- Famille internée en camp par le gouvernement de Vichy, père livré aux Nazis par le gouvernement de Vichy, déporté et mort au camp de concentration d'Auschwitz.

# Alexander Grothendieck (Berlin 1928-); médaille Fields 1966

- Famille internée en camp par le gouvernement de Vichy, père livré aux Nazis par le gouvernement de Vichy, déporté et mort au camp de concentration d'Auschwitz.
- Alexander hébergé à Le Chambon-sur-Lignon, village protestant des Cévennes, jusqu' à la fin de la guerre.

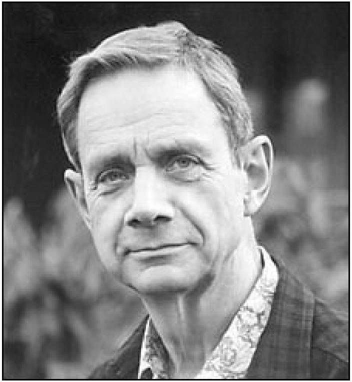
# Alexander Grothendieck (Berlin 1928-); médaille Fields 1966

- Famille internée en camp par le gouvernement de Vichy, père livré aux Nazis par le gouvernement de Vichy, déporté et mort au camp de concentration d'Auschwitz.
- Alexander hébergé à Le Chambon-sur-Lignon, village protestant des Cévennes, jusqu' à la fin de la guerre.
- Après plusieurs étapes géographiques et mathématiques, il entreprend de refondre la géométrie algébrique: une œuvre absolument colossale.

# La cohomologie étale

- Et construit, influencé par les idées de Serre, en partie en collaboration avec Michael Artin (Hamburg, 1934-)), le fils d'Emil Artin, la *cohomologie étale*, cet invariant topologique dont l'existence avait été rêvée par Weil.

- Et construit, influencé par les idées de Serre, en partie en collaboration avec Michael Artin (Hamburg, 1934-)), le fils d'Emil Artin, la *cohomologie étale*, cet invariant topologique dont l'existence avait été rêvée par Weil.



# La rationalité: clin d'œil de l'histoire

- Elle fut démontrée en 1960 par Bernard Dwork (Bronx 1923-New Brunswick 1998).

# La rationalité: clin d'œil de l'histoire

- Elle fut démontrée en 1960 par Bernard Dwork (Bronx 1923-New Brunswick 1998).
- Alors que à Paris, toute l'école de Grothendieck travaillait à son programme, Dwork, qui fut tout d'abord ingénieur électricien, et finit par aller à Columbia à New York, où ...Emil Artin enseignait l'algèbre, "entre dans le sujet".

# La rationalité: clin d'œil de l'histoire

- Elle fut démontrée en 1960 par Bernard Dwork (Bronx 1923-New Brunswick 1998).
- Alors que à Paris, toute l'école de Grothendieck travaillait à son programme, Dwork, qui fut tout d'abord ingénieur électricien, et finit par aller à Columbia à New York, où ...Emil Artin enseignait l'algèbre, "entre dans le sujet".
- Il n'utilise pas la cohomologie étale, mais une autre cohomologie, appelée $p$-adique, qu'il contribue à construire, dont les prémisses consistent en la cohomologie des vecteurs de Witt de Serre.

# La rationalité: clin d'œil de l'histoire

- Elle fut démontrée en 1960 par Bernard Dwork (Bronx 1923-New Brunswick 1998).
- Alors que à Paris, toute l'école de Grothendieck travaillait à son programme, Dwork, qui fut tout d'abord ingénieur électricien, et finit par aller à Columbia à New York, où ...Emil Artin enseignait l'algèbre, "entre dans le sujet".
- Il n'utilise pas la cohomologie étale, mais une autre cohomologie, appelée $p$-adique, qu'il contribue à construire, dont les prémisses consistent en la cohomologie des vecteurs de Witt de Serre.
- Il y ajoute des idées nouvelles, analytiques, de nature radicalement différentes de celles cherchées par l'école "française".

# La rationalité: clin d'œil de l'histoire

- Elle fut démontrée en 1960 par Bernard Dwork (Bronx 1923-New Brunswick 1998).
- Alors que à Paris, toute l'école de Grothendieck travaillait à son programme, Dwork, qui fut tout d'abord ingénieur électricien, et finit par aller à Columbia à New York, où ...Emil Artin enseignait l'algèbre, "entre dans le sujet".
- Il n'utilise pas la cohomologie étale, mais une autre cohomologie, appelée $p$-adique, qu'il contribue à construire, dont les prémisses consistent en la cohomologie des vecteurs de Witt de Serre.
- Il y ajoute des idées nouvelles, analytiques, de nature radicalement différentes de celles cherchées par l'école "française".
- Grothendieck en 1965 redonne une autre démonstration de la rationalité dans le cadre de sa théorie de la cohomologie étale, et montre aussi l'équation fonctionnelle.

- En 1969, Grothendieck inclut les conjectures de Weil dans un édifice encore plus profond: ce sont les *conjectures standard*. De leur compréhension devaient résulter, non seulement une solution à la partie la plus difficile des conjectures de Weil, le $\frac{\omega}{2}$, dont l'origine est comme on l'a vu la conjecture de Riemann, mais aussi nombre de conjectures et points de vue nouveaux en géométrie algébrique.

# Grothendieck: les conjectures standard

- En 1969, Grothendieck inclut les conjectures de Weil dans un édifice encore plus profond: ce sont les *conjectures standard*. De leur compréhension devaient résulter, non seulement une solution à la partie la plus difficile des conjectures de Weil, le $\frac{\omega}{2}$, dont l'origine est comme on l'a vu la conjecture de Riemann, mais aussi nombre de conjectures et points de vue nouveaux en géométrie algébrique.
- Il est difficile de trouver une métaphore pour qualifier l'ampleur de ces conjectures standard. Elles (me) donnent le vertige.

# Grothendieck: les conjectures standard

- En 1969, Grothendieck inclut les conjectures de Weil dans un édifice encore plus profond: ce sont les *conjectures standard*. De leur compréhension devaient résulter, non seulement une solution à la partie la plus difficile des conjectures de Weil, le $\frac{\omega}{2}$, dont l'origine est comme on l'a vu la conjecture de Riemann, mais aussi nombre de conjectures et points de vue nouveaux en géométrie algébrique.
- Il est difficile de trouver une métaphore pour qualifier l'ampleur de ces conjectures standard. Elles (me) donnent le vertige.
- Elles sont, à ce jour, inaccessibles, et restent indémontrées.

# Pierre Deligne: Etterbeek 1944-; médaille Fields 1978, prix Abel 2013

# Serre sur Deligne

- Extrait d'une interview de Serre de la fondation Simons: *For me he is maybe the best mathematician living at the moment. One could give other names, but then I would say: Well after all I prefer Deligne. And I' m certainly not the only one to think that.*

# Serre sur Deligne

- Extrait d'une interview de Serre de la fondation Simons: *For me he is maybe the best mathematician living at the moment. One could give other names, but then I would say: Well after all I prefer Deligne. And I' m certainly not the only one to think that.*
- *Pour moi il est peut-être le meilleur mathématicien vivant à l'heure actuelle. On pourrait citer d'autres noms, mais alors je dirais: bon finalement, je préfère Deligne. Et je ne suis sûrement pas le seul.*

# Les conjecture de Weil par Deligne

- Deligne donc prouve les conjectures de Weil en 1974. Il est le jeune disciple de Grothendieck. Il développe avec lui toutes les propriétés de la cohomologie étale. Mais il ne suit pas le programme de Grothendieck aux fins de démontrer le $\frac{\omega}{2}$.

# Les conjecture de Weil par Deligne

- Deligne donc prouve les conjectures de Weil en 1974. Il est le jeune disciple de Grothendieck. Il développe avec lui toutes les propriétés de la cohomologie étale. Mais il ne suit pas le programme de Grothendieck aux fins de démontrer le $\frac{\omega}{2}$.
- Écoutons-le dans l'interview de la fondation Simons. (Je traduis en français).

# Les conjecture de Weil par Deligne

- Deligne donc prouve les conjectures de Weil en 1974. Il est le jeune disciple de Grothendieck. Il développe avec lui toutes les propriétés de la cohomologie étale. Mais il ne suit pas le programme de Grothendieck aux fins de démontrer le $\frac{\omega}{2}$.
- Écoutons-le dans l'interview de la fondation Simons. (Je traduis en français).
- " Grothendieck était fixé sur les conjectures standard....Quand on lui a rapporté que je les avais démontrées, il a demandé si j'avais démontré les conjectures standard. Non." Deligne résume alors la pensée de Grothendieck: "Alors c'est une mauvaise démonstration..."

# Les conjecture de Weil par Deligne

- Il explique, outre le rôle capital joué par le développement de la cohomologie étale, l'influence de Serre dans son cheminement d'idées, l'analogue complexe de Serre évoqué plus haut, le conseil de Serre de regarder les formes modulaires, un sujet qui ne rentrait pas dans le programme de Grothendieck.

- Il explique, outre le rôle capital joué par le développement de la cohomologie étale, l'influence de Serre dans son cheminement d'idées, l'analogue complexe de Serre évoqué plus haut, le conseil de Serre de regarder les formes modulaires, un sujet qui ne rentrait pas dans le programme de Grothendieck.
- Il explique comment il a regardé en premier le cas d'une seule équation, comment la preuve, qui n'atteint pas encore, et de loin, le degré de complexité de la preuve générale, a convaincu Serre que la solution n'était peut-être plus très loin.

# Les conjecture de Weil par Deligne

- Il explique, outre le rôle capital joué par le développement de la cohomologie étale, l'influence de Serre dans son cheminement d'idées, l'analogue complexe de Serre évoqué plus haut, le conseil de Serre de regarder les formes modulaires, un sujet qui ne rentrait pas dans le programme de Grothendieck.
- Il explique comment il a regardé en premier le cas d'une seule équation, comment la preuve, qui n'atteint pas encore, et de loin, le degré de complexité de la preuve générale, a convaincu Serre que la solution n'était peut-être plus très loin.
- Il explique l'influence d'autres travaux liés directement à la conjecture de Riemann.

# Conclusion

- Les conjectures de Weil ont été au centre de tous les travaux de géométrie algébrique-arithmétique, de leur formulation, à leur solution, soit 25 ans, et au-delà, jusqu'à maintenant.

# Conclusion

- Les conjectures de Weil ont été au centre de tous les travaux de géométrie algébrique-arithmétique, de leur formulation, à leur solution, soit 25 ans, et au-delà, jusqu'à maintenant.
- Weil a eu le bonheur de les voir démontrées. Je n'ai trouvé nulle part écrit sa réaction.

# Conclusion

- Les conjectures de Weil ont été au centre de tous les travaux de géométrie algébrique-arithmétique, de leur formulation, à leur solution, soit 25 ans, et au-delà, jusqu'à maintenant.
- Weil a eu le bonheur de les voir démontrées. Je n'ai trouvé nulle part écrit sa réaction.
- Grothendieck, en visonnaire et bâtisseur, a construit un édifice immense dont elles auraient dû être une des conséquences multiples.

# Conclusion

- Les conjectures de Weil ont été au centre de tous les travaux de géométrie algébrique-arithmétique, de leur formulation, à leur solution, soit 25 ans, et au-delà, jusqu'à maintenant.
- Weil a eu le bonheur de les voir démontrées. Je n'ai trouvé nulle part écrit sa réaction.
- Grothendieck, en visonnaire et bâtisseur, a construit un édifice immense dont elles auraient dû être une des conséquences multiples.
- L'histoire en a décidé autrement. Tout en incorporant certaines de ses idées, elle a pris un chemin plus sinueux, plus étroit, plus loin des autoroutes à 6 voies.

# Conclusion

- Les conjectures de Weil ont été au centre de tous les travaux de géométrie algébrique-arithmétique, de leur formulation, à leur solution, soit 25 ans, et au-delà, jusqu'à maintenant.
- Weil a eu le bonheur de les voir démontrées. Je n'ai trouvé nulle part écrit sa réaction.
- Grothendieck, en visonnaire et bâtisseur, a construit un édifice immense dont elles auraient dû être une des conséquences multiples.
- L'histoire en a décidé autrement. Tout en incorporant certaines de ses idées, elle a pris un chemin plus sinueux, plus étroit, plus loin des autoroutes à 6 voies.
- La démonstration de Deligne, alors comme maintenant, nous éblouit par son ingéniosité et sa profondeur.

# Conclusion

- Aux tout jeunes ici présents: les mathématiques, cet art de l'abstraction, ont le pouvoir de nous fasciner, de nous procurer une joie et une émotion immenses à la découverte d'une idée nouvelle.

# Conclusion

- Aux tout jeunes ici présents: les mathématiques, cet art de l'abstraction, ont le pouvoir de nous fasciner, de nous procurer une joie et une émotion immenses à la découverte d'une idée nouvelle.
- Nous tous, mathématiciens, vous invitons à ne pas vous décourager de l'aridité de certains moments de leur apprentissage, et à vous laisser guider par votre inclination.

# Conclusion

- Aux tout jeunes ici présents: les mathématiques, cet art de l'abstraction, ont le pouvoir de nous fasciner, de nous procurer une joie et une émotion immenses à la découverte d'une idée nouvelle.
- Nous tous, mathématiciens, vous invitons à ne pas vous décourager de l'aridité de certains moments de leur apprentissage, et à vous laisser guider par votre inclination.
- **Merci de votre attention**.

# Conclusion

- Aux tout jeunes ici présents: les mathématiques, cet art de l'abstraction, ont le pouvoir de nous fasciner, de nous procurer une joie et une émotion immenses à la découverte d'une idée nouvelle.
- Nous tous, mathématiciens, vous invitons à ne pas vous décourager de l'aridité de certains moments de leur apprentissage, et à vous laisser guider par votre inclination.
- **Merci de votre attention**.
- *Je remercie Pierre Deligne de ses commentaires et critiques bienveillantes sur une version préliminaire de ce texte, qui ont contribué à l'améliorer.*